



shakeryan.com

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: لگاریتم - درس دوم - قلم چی

①

اگر $\log 2 = 0/3$ و $\log 6 = 0/8$ باشد، حاصل $\log_9 40$ کدام است؟(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{8}{5}$ (۳) $\frac{9}{8}$ (۴) $\frac{11}{9}$

پاسخ: گزینه ۲

ساده درصد پاسخگویی ۴۵% قلمچی ۱۴۰۰

گزینه «۲»

چون لگاریتم‌های داده شده در مبنای ۱۰ هستند، پس لگاریتم خواسته شده را هم به مبنای ۱۰ تبدیل می‌کنیم:

$$\log_9 40 = \frac{\log 40}{\log 9} = \frac{\log(2^3 \times 5)}{\log 3^2} = \frac{3 \log 2 + \log 5}{2 \log 3}$$

$$= \frac{3 \log 2 + (1 - \log 2)}{2(\log 6 - \log 2)} = \frac{0/9 + 0/7}{2(0/8 - 0/3)} = \frac{1/6}{1} = \frac{1}{6}$$

②

اگر $\log^{3-x+1} = \log^{28} - x \log^3$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\log_9 \sqrt[3]{3} - 1}{1 - \log^x \sqrt[3]{3}}$ کدام است؟(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $-\frac{3}{2}$

(۳) ۳

(۴) -۳

پاسخ: گزینه ۲

دشوار قلمچی ۱۴۰۰

گزینه‌ی «۲»

$$\log^{(3-x+1)} = \log^{28} + \log^{3-x}$$

$$\Rightarrow \log^{(3-x+1)} = \log^{(28)(3-x)} \Rightarrow 3^{-x} (28 - 1) = 1$$

$$\Rightarrow 3^{-x} = \frac{1}{27} = 3^{-3} \Rightarrow x = 3$$

حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\log_9 \sqrt[3]{3} - 1}{1 - \log^3 \sqrt[3]{3}} = \frac{\log_3^{\frac{5}{3}} - 1}{1 - 2} = \frac{\frac{5}{3} \log_3^3 - 1}{-1}$$

$$= -\left(\frac{5}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3}$$

(۳)

اگر $\log_4^3 = a$ باشد، حاصل $\log_9^{16}$ بر حسب a کدام است؟

$$\frac{a-1}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{a} \quad (۴)$$

$$\frac{a+2}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{2a+1}{2} \quad (۳)$$

دشوار

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه‌ی «۴»

$$\log_4^3 = a \Rightarrow \log_{4^2}^3 = a \Rightarrow \frac{1}{2} \log_2^3 = a$$

$$\Rightarrow \log_2^3 = 2a \Rightarrow \log_3^2 = \frac{1}{2a}$$

$$\log_9^{16} = \log_{3^2}^{2^4} = \frac{4}{2} \log_3^2 = 2 \log_3^2 = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}$$

(۴)

در کدام گزینه نمودار دو تابع f و g بر هم منطبق نیستند؟

$$g(x) = -\log_2^{(x-1)}, \quad f(x) = \log_{\frac{1}{2}}^{(x-1)} \quad (۲)$$

$$g(x) = 2 - \log_3^x, \quad f(x) = 2 + \log_3^{\frac{1}{x}} \quad (۴)$$

$$g(x) = 2^{-x}, \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (۱)$$

$$g(x) = -2^{-x}, \quad f(x) = 2^x \quad (۳)$$

دشوار

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه‌ی «۳»

با ساده کردن تابع g در هر گزینه و بررسی تک‌تک گزینه‌ها، گزینه درست را پیدا می‌کنیم:

$$g(x) = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x = f(x) \quad \text{گزینه «۱»}$$

$$g(x) = \log_{2^{-1}}^{(x-1)} = \log_{\frac{1}{2}}^{(x-1)} = f(x) \quad \text{گزینه «۲»}$$

$$g(x) = -(2^{-1})^x = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \neq f(x) \quad \text{گزینه «۳»}$$

$$g(x) = 2 + \log_3^{x^{-1}} = 2 + \log_3^{\frac{1}{x}} = f(x) \quad \text{گزینه «۴»}$$

توجه داشته باشید که در همه گزینه‌ها، دامنه‌های هر دو تابع با هم برابر هستند.

۵

چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف) تابع $f(x) = \log_p^{(x-1)}$ روی بازه $(0, +\infty)$ پیوسته است.

ب) تابع $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{p})$ روی بازه $(0, \frac{\pi}{p})$ پیوسته است.

پ) اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، روی هر زیر بازه دلخواه از آن نیز پیوسته است.

ت) تابع $h(x) = [2x]$ روی بازه $(0, 2)$ پیوسته است. ($[]$ نماد جزء صحیح است).

۴ (۴

۳ (۳

۲ (۲

۱ (۱

دشوار

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

دامنه تابع $f(x) = \log_p^{(x-1)}$ برابر است با:

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow D_f = (1, +\infty)$$

بنابراین مورد (الف) نادرست است.

موارد (ب) و (پ) درست هستند.

تابع $h(x) = [2x]$ در $x = \frac{1}{p}, x = 1, x = \frac{3}{p}$ ناپیوسته است. به طور مثال در $x = 1$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [2 \times 1^+] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [2 \times 1^-] = 1$$

بنابراین $h(x)$ در $x = 1$ پیوسته نیست. پس مورد (ت) نیز نادرست است.

۶

اگر $\log 2 \simeq 0/3$ و $\log 3 \simeq 0/47$ باشد، حاصل تقریبی $\log \sqrt[4]{120}$ کدام است؟

$\frac{209}{400}$ (۴

$\frac{207}{400}$ (۳

$\frac{107}{200}$ (۲

$\frac{109}{200}$ (۱

دشوار

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

$$\log \sqrt[4]{120} = \log 120^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log 120$$

$$= \frac{1}{4} \log(10 \times 2^2 \times 3) = \frac{1}{4} (\log 10 + 2 \log 2 + \log 3)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 2 \times 0/3 + 0/47) = \frac{1}{4} \times 2/07 = \frac{207}{400}$$

۷

تعداد جواب‌های معادله لگاریتمی $\log_3(5x^2 + 2x - 7) - \log_3(x - 1) = 2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی شمار

دشوار

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۱

$$\log_3(5x^2 + 2x - 7) - \log_3^{(x-1)} = 2$$

$$\Rightarrow \log_3 \frac{5x^2 + 2x - 7}{x - 1} = 2$$

$$\frac{5x^2 + 2x - 7}{x - 1} = 3^2 \Rightarrow 5x^2 + 2x - 7 = 9x - 9$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 7x + 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x = 1, i, \bar{i} \\ x = \frac{2}{5}, i, \bar{i} \end{cases}$$

هیچیک از دو مقدار x در دامنه $\log_3^{(x-1)}$ که برابر $(1, +\infty)$ است، قرار ندارند. پس معادله جواب ندارد.

۸

نمودار تابع $f(x) = \log_a x$ در دو نقطه به طول‌های ۲ و b نمودار تابع وارونش را قطع می‌کند. مقدار b کدام است؟

۱۶ (۴)

۸ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

دشوار

درصد پاسخگویی ۱۴%

قلمچی ۱۳۹۹

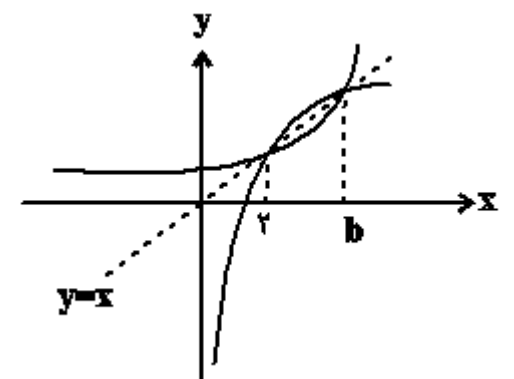
پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

چون طول یکی از نقاط برخورد برابر ۲ است، باید $a > 1$ باشد.

دقت کنید که اگر $0 < a < 1$ باشد، طول نقاط برخورد نمودار تابع $f(x) = \log_a x$ و نمودار تابع وارونش یعنی $f^{-1}(x) = a^x$ در بازه $(0, 1)$ خواهند بود.

بنابراین نمودار توابع f و f^{-1} به صورت زیر است و در نتیجه داریم:



$$f(2) = 2, f(b) = b$$

$$\Rightarrow \log_a 2 = 2 \Rightarrow a^2 = 2 \xrightarrow{a>1} a = \sqrt{2}$$

$$\log_a b = b \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} b = b \Rightarrow b = \sqrt{2}^b$$

$$\Rightarrow b^2 = 2^b$$

واضح است که $b = 4$ جواب معادله بالا است: $4^2 = 2^4 = 16$.

۹

مجموع جواب‌های معادله $\log_2(4^x + 15) = x + 3$ ، کدام است؟

(۴) $\log_4 15$

(۳) $\log_2 15$

(۲) ۱۵

(۱) ۸

نسبتاً دشوار

خارج از کشور ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$4^x + 15 = 2^{(x+3)} = 2^3 \times 2^x = 8 \times 2^x$$

$$\Rightarrow 4^x - 8 \times 2^x + 15 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x - 5)(2^x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 5 \Rightarrow x_1 = \log_2 5 \\ 2^x = 3 \Rightarrow x_2 = \log_2 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} : x_1 + x_2 = \log_2 5 + \log_2 3 = \log_2 15$$

۱۰

اگر $\log_4 3 = 0.8$ باشد، مقدار $\log_{12} 6$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{7}{9}$

(۳) $\frac{3}{4}$

(۲) $\frac{8}{11}$

(۱) $\frac{13}{18}$

متوسط

کنکور سراسری ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه ۱

با ساده کردن $\log_{12} 6$ داریم:

$$\log_{12} 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 12} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 2} = \frac{1 + \log_2 3}{2 + \log_2 3}$$

از طرفی:

$$\log_4 3 = \log_{2^2} 3 = \frac{1}{2} \log_2 3 = 0.8 \Rightarrow \log_2 3 = 1.6$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 1.6}{2 + 1.6} = \frac{2.6}{3.6} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

(۱۱)

اگر در معادله $2\log_x a + \log_a \sqrt{x} = 2$ مقدار x برابر ۹ باشد، مقدار a کدام است؟

(۴) ۹

(۳) ۳

(۲) $\frac{1}{3}$ (۱) $\frac{1}{9}$

متوسط

خارج از کشور ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

با استفاده از رابطه‌های $\log_y^x = \frac{1}{\log_x^y}$ و $\log_y^{x^m} = m \log_y^x$ داریم:

$$2 \log_x^a + \log_a^{x^{\frac{1}{2}}} = 2 \rightarrow 2 \log_x^a + \frac{1}{2} \log_a^x = 2$$

$$\xrightarrow{\log_x^a = t} 2t + \frac{1}{2t} = 2 \xrightarrow{\times 2t} 4t^2 + 1 = 4t \Rightarrow (4t^2 - 4t + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (2t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} = \log_x^a \rightarrow \sqrt{x} = a$$

$$\xrightarrow{x=9} \sqrt{9} = 3 = a$$

(۱۲)

اگر تساوی $\log_x y - 2 \log_y x = 1$ به ازای $x, y > 1$ برقرار باشد، کدام تساوی درست است؟

 $xy = 2$ (۴) $y = \sqrt{x}$ (۳) $y = x^3$ (۲) $y = x^2$ (۱)

متوسط

کنکور سراسری ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با توجه به رابطه $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$ داریم:

$$\log_x^y - \frac{2}{\log_x^y} = 1 \xrightarrow{\log_x^y = t} t - \frac{2}{t} = 1 \xrightarrow{\times t} t^2 - 2 = t$$

$$\rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -1 = \log_x^y \rightarrow y = x^{-1} \rightarrow y = \frac{1}{x} \rightarrow xy = 1 \\ t = 2 = \log_x^y \rightarrow y = x^2 \end{cases}$$

توجه داشته باشید که چون $x, y > 1$ است. $xy = 1$ قابل قبول نیست.

13

اگر به ازای اعداد مثبت و مخالف یک a ، b و c تساوی $\log_a c + \log_b c = 1$ برقرار باشد، آنگاه $\log_c a \cdot \log_c b$ کدام است؟

$2\log_c(a+b)$ (4)

$\log_c(a+b)$ (3)

$2\log_c(ab)$ (2)

$\log_c(ab)$ (1)

پاسخ: گزینه 1

متوسط

خارج از کشور ۱۴۰۰

گزینه «1»

می‌دانیم $\log_y^x = \frac{1}{\log_x^y}$ است، پس تساوی داده شده به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{1}{\log_c^a} + \frac{1}{\log_c^b} = \frac{\log_c^a + \log_c^b}{\log_c^a \cdot \log_c^b} = \frac{\log_c^{ab}}{\log_c^a \cdot \log_c^b} = 1$$

$$\Rightarrow \log_c^a \cdot \log_c^b = \log_c(ab)$$

۱۴

اگر $\log_3 2 = \frac{5}{8}$ باشد، آنگاه $\log_{18} 8$ ، کدام است؟

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{8}{11}$ (۳)

$\frac{5}{7}$ (۲)

$\frac{15}{22}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

متوسط

خارج از کشور ۱۳۹۹

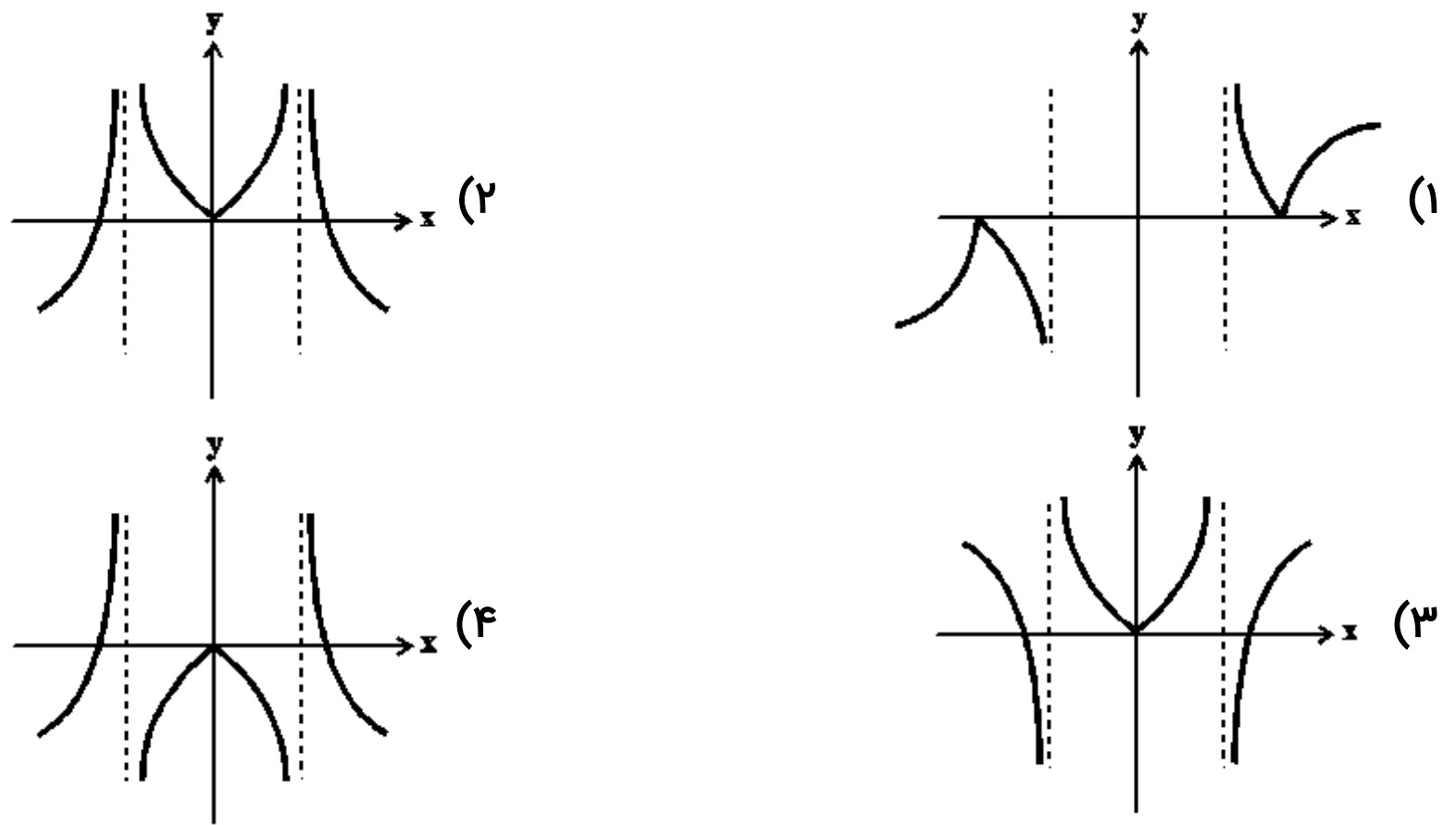
گزینه ۲

با استفاده از قوانین لگاریتم داریم: $\log_3^2 = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{5}{8} \Rightarrow \log 2 = \frac{5}{8} \log 3$ (*)

حاصل $\log_{18}^8$ برابر است با: $\log_{18}^8 = \frac{\log 8}{\log 18} = \frac{\log 2^3}{\log 9 + \log 2} = \frac{3 \log 2}{2 \log 3 + \log 2}$

$$\xrightarrow{*} \frac{3 \left(\frac{5}{8} \right) \log 3}{2 \log 3 + \frac{5}{8} \log 3} = \frac{\frac{15}{8} \log 3}{\frac{21}{8} \log 3} = \frac{5}{7}$$

نمودار تابع $y = \log\left(\frac{1}{x^2 - 2|x| + 1}\right)$ به کدام شکل شبیه است؟



پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

تابع را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = \log(|x| - 1)^{-2} = -2 \log ||x| - 1| = -2 \log ||x| - 1|$$

پس کافی است ابتدا تابع $y = \log x$ را رسم کنیم، سپس سمت چپ محور y ها را حذف و قرینه سمت راست را نسبت به محور y ها به شکل اضافه کنیم تا نمودار تابع $y = \log |x|$ به دست آید:

$$y = \log(|x - 1|) \quad \text{سپس نمودار را یک واحد به راست منتقل کنیم:}$$

سپس دوباره سمت چپ محور y ها را حذف و قرینه قسمت راست را نسبت به محور y ها به شکل اضافه کنیم: $y = \log(||x| - 1|)$ و در انتها نمودار را نسبت به محور x ها قرینه و عرض نقاط آن را در ۲ ضرب کنیم.

نمودار حاصل، نمودار گزینه «۳» خواهد شد.

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۳%

قلمچی ۱۳۹۹

اگر $x = \log_4^3$ جواب معادله $\log_2^{(4^{2x}+3)} = 2x + a$ باشد، مقدار a کدام است؟

$$\log_4^9 (4)$$

$$1 (3)$$

$$\frac{1}{2} (2)$$

$$(1) 2$$

متوسط

درصد پاسخگویی ۱۵%

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه های دام دار ۳ - ۴

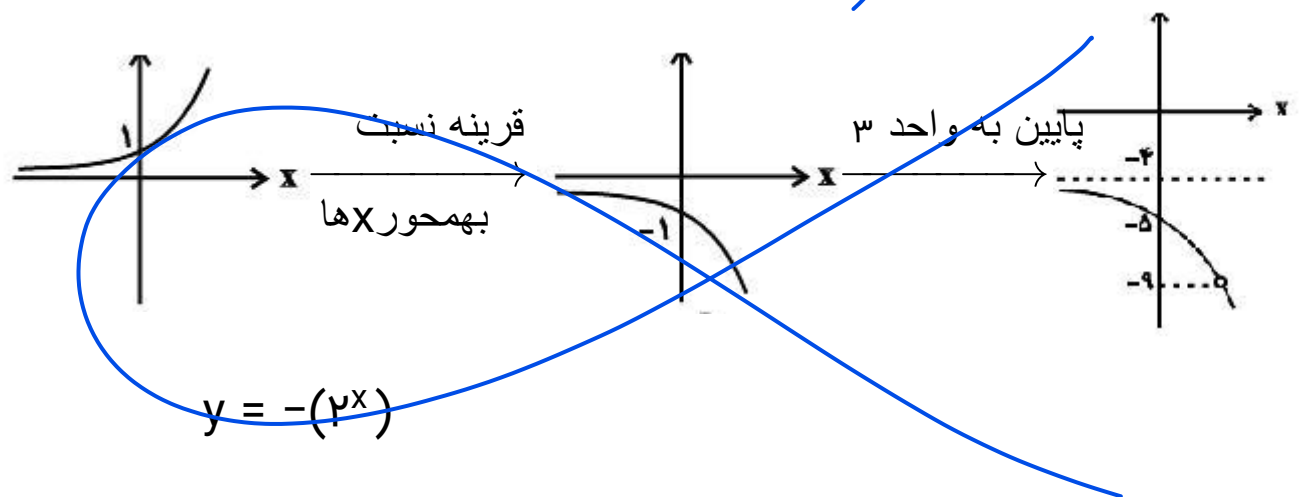
پاسخ: گزینه ۱

حل

$$\log_2 12 = 2 \log_4 3 + a$$

$$a = 2$$

$$y = 2^x$$



اگر $2^x = 5$ باشد، مقدار $4 - (2^x) - 5 = -9$ برابر است با:

پس ۹- در برد f نیست.

دو تابع $f(x) = \log_2(x+3)$ و $g(x) = \log_4(3x+1) + 1$ در دو نقطه A و B متقاطع‌اند. شیب خط گذرنده از نقاط A و B کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۲

(۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخ‌گویی ۲۰%

متوسط

دو ضابطه را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$f(x) = g(x)$$

به جای ۱، $\log_4^f$ و به جای $\log_2(x+3)$ ، $\log_4^f(x+3)^2$ را قرار می‌دهیم. داریم:

$$\log_4^f(x+3)^2 = \log_4^f(3x+1) + \log_4^f$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 12x+4 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases}$$

با جای‌گذاری xهای بدست آمده در یکی از ضابطه‌ها، مختصات A و B به صورت $A(1,2)$ و $B(5,3)$ به دست می‌آید.

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{3-2}{5-1} = \frac{1}{4} \text{ : شیب خط گذرنده از A و B}$$

اگر $x = 2$ جوابی از معادله $\log_f(x + a) + 2\log_f(x - 1) = \log_f^x$ باشد، آن‌گاه این معادله در مجموع چند جواب دارد؟

(۱) یک

(۲) دو

(۳) سه

(۴) چهار

پاسخ: گزینه ۱

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۲%

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه های دام دار ۲

گزینه «۱»

از آنجا که $x = 2$ جواب معادله است، داریم:

$$\log_f^{(2+a)} + \underbrace{2\log_f^{(1)}}_0 = \log_f^2 = 1 \Rightarrow \log_f^{(2+a)} = 1$$

$$\Rightarrow 2 + a = 4 \Rightarrow a = 2$$

با قرار دادن $a = 2$ داریم:

$$\log_f^{(x+2)} + 2\log_f^{(x-1)} = \log_f^x = \log_f^{x^2}$$

$$\Rightarrow \log_f^{(x+2)(x-1)^2} = \log_f^{x^2} \Rightarrow (x+2)(x-1)^2 = x^2$$

$$x^3 - 3x + 2 = x^2 \Rightarrow x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$$

چون $x = 2$ یکی از ریشه‌ها است، پس با تقسیم بر $(x - 2)$ داریم:

$$x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ یا } x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \xrightarrow[\text{دامنه}]{x} x = 2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

بنابراین معادله فقط همین یک جواب را دارد.

۱۹

مجموع جواب‌های معادله $\log_{\sqrt{3}}^{(2x-1)} - \log_{(\sqrt{3}-1)}^9 = 1$ کدام است؟

۸ (۲)

$\frac{17}{3}$ (۱)

۶ (۴)

$\frac{13}{3}$ (۳)

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۴%

قلم‌چی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$\log_{\sqrt{3}}^{(2x-1)} - \log_{(\sqrt{3}-1)}^9 = 1 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^{(2x-1)} - 2 \log_{(\sqrt{3}-1)}^{\sqrt{3}} = 1$$

$$\begin{array}{l} \log_{\sqrt{3}}^{(2x-1)} = A \\ \log_{(\sqrt{3}-1)}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}^{(2x-1)}} \end{array} \rightarrow A - \frac{2}{A} = 1$$

$$\xrightarrow{\times A} A^2 - A - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$A = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^{(2x-1)} = 2 \Rightarrow 2x - 1 = 9 \Rightarrow x_1 = 5$$

$$A = -1 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^{(2x-1)} = -1 \Rightarrow 2x - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x_1 + x_2 = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

۲۰

اگر $9\sqrt{3} = 9^x$ و $\log_{\sqrt{x}}^5 - \log_5^y = 1$ باشد، مقدار y کدام است؟

۴ (۲)

۱ (۱)

۲۵ (۴)

۵ (۳)

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۴%

قلم‌چی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$3^x \times 3^{\frac{1}{2}} = 3^{2x} \Rightarrow 3^{\frac{5}{2}} = 3^{2x} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2x \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{\frac{5}{4}}}^5 - \log_5^y = \log_{\sqrt{5}}^5 - \log_5^y$$

$$\log_{\frac{1}{2}}^5 - \log_5^y = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_5^5 - \log_5^y = 2 \log_5^5 - \log_5^y = 2 - \log_5^y = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \log_5^y \Rightarrow y = 5$$

اگر x عددی مثبت و غیر از یک باشد، آن گاه حاصل عبارت
 $\log_{(\sqrt{2}+1)} (3 + 2\sqrt{2}) + \log_{(2-\sqrt{3})} (\sqrt{3} + 2) + \log_{\sqrt[4]{x}} x \sqrt[3]{x}$ کدام است؟

$$\frac{17}{3} \quad (2)$$

$$\frac{19}{3} \quad (1)$$

$$\frac{13}{3} \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۴%

قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۱»

می‌دانیم $(\sqrt{2} + 1)^2 = 2 + 1 + 2\sqrt{2}$ پس $3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2$ بنابراین:

$$\log_{(\sqrt{2}+1)} (3 + 2\sqrt{2}) = \log_{(\sqrt{2}+1)} (\sqrt{2} + 1)^2 = 2$$

می‌دانیم $(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 1$ پس $2 + \sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^{-1}$ بنابراین:

$$\log_{(2-\sqrt{3})} (\sqrt{3} + 2) = \log_{(2-\sqrt{3})} (2 - \sqrt{3})^{-1} = -1$$

از طرفی داریم:

$$\log_{\sqrt[4]{x}} x \cdot \sqrt[3]{x} = \log_{x^{\frac{1}{4}}} x^1 \cdot x^{\frac{1}{3}} = \log_{x^{\frac{1}{4}}} x^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{16}{3}$$

پس حاصل عبارت موردنظر برابر است با:

$$2 - 1 + \frac{16}{3} = \frac{19}{3}$$

۲۲

اگر دامنه تابع $f(x) = \log_{a-1}(2x - b)$ برابر $(3, +\infty)$ و $f(\frac{15}{2}) = 2$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

۱ (۴)

۴ (۳)

۶ (۲)

۱۰ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۴%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

دامنه تابع f عبارت است از:

$$2x - b > 0 \Rightarrow x > \frac{b}{2} \xrightarrow{x>3} \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$$

بنابراین $f(x) = \log_{a-1}(2x - 6)$ ، لذا:

$$f(\frac{15}{2}) = \log_{a-1}(2(\frac{15}{2}) - 6) = 2 \Rightarrow \log_{a-1}(9) = 2$$

$$\Rightarrow (a - 1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4 \text{ ق ق} \\ a - 1 = -3 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 10$$

۲۳

اگر $\frac{1}{3} \log_{\sqrt{3}}^x = 2(\log_p^{(x+2)} + \log_p^{(x-2)})$ باشد، $\log_p^{(x+4)}$ کدام است؟

۵ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۶%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} \log_p^{(x+2)} + \log_p^{(x-2)} &= \log_p^{(x+2)(x-2)} \\ &= \log_p^{(x^2-4)} \end{aligned}$$

با توجه به فرمول $a^{\log_a^x} = x$ داریم:

$$\frac{1}{3} \log_{\sqrt{3}}^x = \frac{1}{3} \log_3^x = 3x$$

$$2 \log_p^{(x^2-4)} = (x^2 - 4)$$

$$\Rightarrow 3x = x^2 - 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق ق} \\ x = 4 \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_p^{(x+4)} = \log_p^4 = 3$$

۲۴

مجموع جواب‌های معادله $\log_2(4^x + 15) = x + 3$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) $\frac{1}{2} \log_2^{15}$
(۳) ۸
(۴) $\log_2^{15}$

پاسخ: گزینه ۴

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۶%

قلم‌چی ۱۳۹۹

گزینه «۴»

$$\log_2(4^x + 15) = x + 3 \Rightarrow 4^x + 15 = 2^{x+3} \Rightarrow 2^{2x} - 8 \times 2^x + 15 = 0$$

$$\xrightarrow{2^x=t} t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t-5)(t-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5 \Rightarrow 2^{x_1} = 5 \Rightarrow x_1 = \log_2^5 \\ t_2 = 3 \Rightarrow 2^{x_2} = 3 \Rightarrow x_2 = \log_2^3 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \log_2^5 + \log_2^3 = \log_2^{15}$$

۲۵

تعداد جواب‌های معادله لگاریتمی $\log_3^{(5x^2+2x-7)} - \log_3^{(x-1)} = 2$ کدام است؟

- (۱) صفر
(۲) ۱
(۳) ۲
(۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۱

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۷%

قلم‌چی ۱۳۹۹

$$\log_3^{(5x^2+2x-7)} - \log_3^{(x-1)} = 2$$

$$\Rightarrow \log_3^{\frac{5x^2+2x-7}{x-1}} = 2$$

$$\frac{5x^2+2x-7}{x-1} = 3^2 \Rightarrow 5x^2+2x-7 = 9x-9$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 7x + 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \text{ غ ق} \\ x=\frac{2}{5} \text{ غ ق} \end{cases}$$

هر دو مقدار x در دامنه $\log_3(x-1)$ که برابر $(1, +\infty)$ است، قرار ندارند، پس معادله جواب ندارد.

در تابع با ضابطه $f(x) = 3^{ax+b}$ ، $f(2) = 3$ و $f^{-1}(1) = 4$ است، حاصل $\log_{37}^{f(-4)}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۸%

قلمچی ۱۳۹۹

$$\begin{aligned} f(2) = 3 &\Rightarrow 3^{2a+b} = 3 \Rightarrow 2a + b = 1 \\ f^{-1}(1) = 4 &\Rightarrow f(4) = 1 \Rightarrow 3^{4a+b} = 1 \Rightarrow 4a + b = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

از حل دستگاه دو معادله، دو مجهول به دست آمده مقادیر a و b را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} -1 \times \begin{cases} 2a + b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -2a - b = -1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 2a = -1 \\ \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 2 \end{aligned}$$

بنابراین $f(x) = 3^{(-\frac{1}{2})x+2}$ و همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \log_{37}^{f(x)} &= \log_{37}^{3^{2ax+b}} = \frac{2ax+b}{3} \log_{37}^3 = \frac{2ax+b}{3} \\ \xrightarrow{x=-4} \log_{37}^{f(-4)} &= \frac{2(-\frac{1}{2})(-4) + 2}{3} = \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

اگر $\log^2 = n$ و $\log^3 = m$ باشد، آنگاه حاصل $\log_{\sqrt[3]{12}}^{4/5}$ کدام است؟

$$\begin{aligned} \frac{6m-3n}{3m+\frac{1}{3}n} & \quad (2) \\ \frac{6m-3n}{m+2n} & \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{6m-3n-3}{3m+n} & \quad (1) \\ \frac{6m-3n-3}{3m+2n} & \quad (3) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۴

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۹%

قلمچی ۱۳۹۹

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt[3]{12}}^{4/5} &= \frac{\log^{4/5}}{\log^{\sqrt[3]{12}}} = \frac{\log^{4/5} - \log^0}{\frac{1}{3} \log^{12}} \\ &= \frac{\log^{4/5} - 1}{\frac{1}{3} \log^{12}} = \frac{\log^4 + \log^0 - 1}{\frac{1}{3} (\log^3 + \log^9)} = \frac{2\log^3 + (1 - \log^9) - 1}{\frac{1}{3} (\log^3 + 2\log^9)} \\ &= \frac{2\log^3 - \log^9}{\frac{1}{3} (\log^3 + 2\log^9)} = \frac{2m - n}{\frac{1}{3} (m + 2n)} = \frac{6m - 3n}{m + 2n} \end{aligned}$$

۲۸

اگر $a = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{2\sqrt{0/125}}$ ، آنگاه حاصل $[4a]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۹%

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \sqrt[8]{2\sqrt{0/125}} &= \sqrt[8]{2\sqrt{\frac{1}{8}}} = \sqrt[8]{2 \times 2^{-\frac{3}{2}}} \\ &= \sqrt[8]{2^{-\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{8} \times -\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{16}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = \log_{\frac{1}{8}} 2^{-\frac{1}{16}} \Rightarrow 8^a = 2^{-\frac{1}{16}} \Rightarrow 2^{3a} = 2^{-\frac{1}{16}} \Rightarrow 3a = -\frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{48} \Rightarrow [4a] = \left[-\frac{1}{12}\right] = -1$$

۲۹

اگر $\log_2(x^2 - 1) = \log_2(x^2 - x - 2) + \log_2(2x - 2) - 1$ باشد، حاصل $\log_{(x+5)}(5x + 1)$ کدام است؟

۲ (۴)

۵/۴ (۳)

۴/۳ (۲)

۳/۲ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۲۹%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - 1) &= \log_2(x^2 - x - 2) + \log_2(2x - 2) - 1 \\ \Rightarrow \log_2(x^2 - 1) - \log_2(x^2 - x - 2) &= \log_2(2x - 2) - 1 \end{aligned}$$

۳۰

اگر $\log(3^{-x} + 1) = \log 28 - x \log 3$ ، حاصل عبارت $\frac{\log_x \sqrt[9]{3} - 1}{1 - \log_x \sqrt[3]{3}}$ کدام است؟

(۴) -۳

(۳) ۳

(۲) $-\frac{3}{2}$

(۱) $\frac{3}{2}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\begin{aligned}\log(3^{-x} + 1) &= \log 28 + \log 3^{-x} \\ \Rightarrow \log(3^{-x} + 1) &= \log(28)(3^{-x}) \Rightarrow 3^{-x} + 1 = 28 \times (3^{-x}) \\ \Rightarrow 28(3^{-x}) - 3^{-x} &= 1 \Rightarrow 3^{-x}(28 - 1) = 1 \\ \Rightarrow 3^{-x} &= \frac{1}{27} = 3^{-3} \Rightarrow x = 3\end{aligned}$$

حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\begin{aligned}\frac{\log_x \sqrt[9]{3} - 1}{1 - \log_x \sqrt[3]{3}} &= \frac{\log_x 3^{\frac{5}{3}} - 1}{1 - 2} = \frac{\frac{5}{3} \log_x 3 - 1}{-1} \\ &= -\left(\frac{5}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

۳۱

اگر $\log_x^5 + \log_x^3 = 1$ باشد، مقدار $\log_x^5$ کدام است؟

(۴) $\log_3^5$

(۳) $\log_3^{15}$

(۲) $\log_5^3$

(۱) $\log_{15}^3$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۰%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

نکته: $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

نکته: $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$

$$\log_5^x + \log_3^x = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_x^5} + \frac{1}{\log_x^3} = 1$$

$$\Rightarrow \log_x^5 + \log_x^3 = \log_x^5 \cdot \log_x^3$$

$$\log_x^{15} = \log_x^5 \cdot \log_x^3 \Rightarrow \log_x^5 = \frac{\log_x^{15}}{\log_x^3} = \log_3^{15}$$

۳۲

اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، آنگاه $\log_{\sqrt{5}}^{\circ/3}$ کدام است؟

(۴) $\frac{2b-2}{a-1}$

(۳) $\frac{2b+2}{1+a}$

(۲) $\frac{2b-2}{1-a}$

(۱) $\frac{2b+2}{1-a}$

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۳۱٪ متوسط

گزینه «۲»

$$\log_{\sqrt{5}}^{\circ/3} = \frac{\log^{\circ/3}}{\log^{\sqrt{5}}} = \frac{\log^3-1}{\frac{1}{3} \log^5} = \frac{b-1}{\frac{1}{3} (1-\log 2)} = \frac{2b-2}{1-a}$$

۳۳

حاصل عبارت $[\log_5^{\circ} - \log_{\sqrt{3}}^9]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

(۴) ۱

(۳) صفر

(۲) -۱

(۱) -۲

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۳۱٪ متوسط

می‌دانیم اگر $a > x$ و $x > y$ ، آنگاه $\log_a^x > \log_a^y$ ، پس:

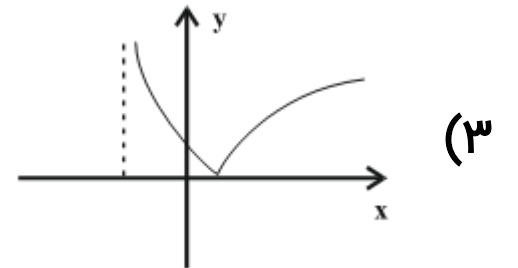
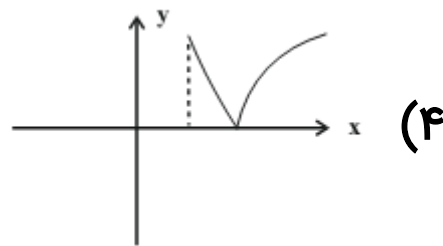
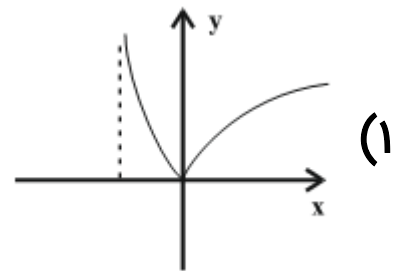
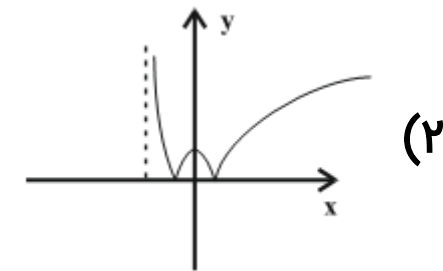
$$5^2 < 5^0 < 5^3 \Rightarrow \log_5 5^2 < \log_5 5^0 < \log_5 5^3$$

$$\Rightarrow 2 < \log_5 5^0 < 3 \Rightarrow [\log_5 5^0] = 2$$

$$(\sqrt{3})^4 = 9 \Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^9 = 4 \quad \text{از طرفی:}$$

$$[\log_5^{\circ} - \log_{\sqrt{3}}^9] = [\log_5^{\circ} - 4] = [\log_5^{\circ}] - 4 = 2 - 4 = -2$$

نمودار تابع $f(x) = |1 - \log(x+1)|$ کدام است؟



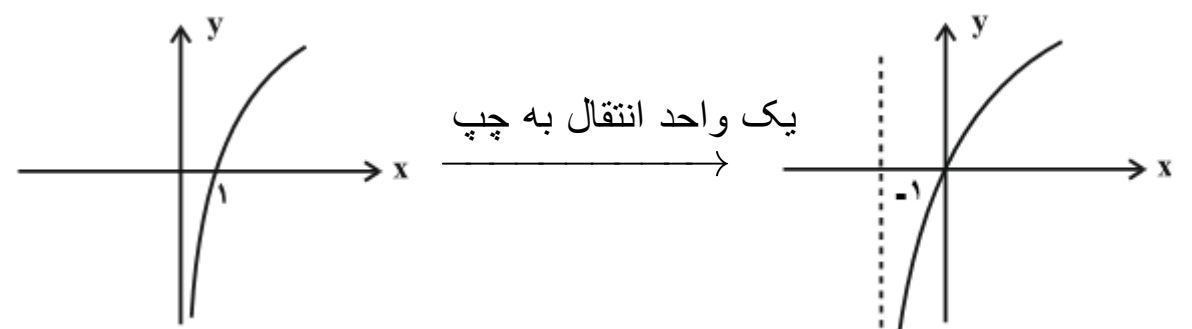
پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

متوسط

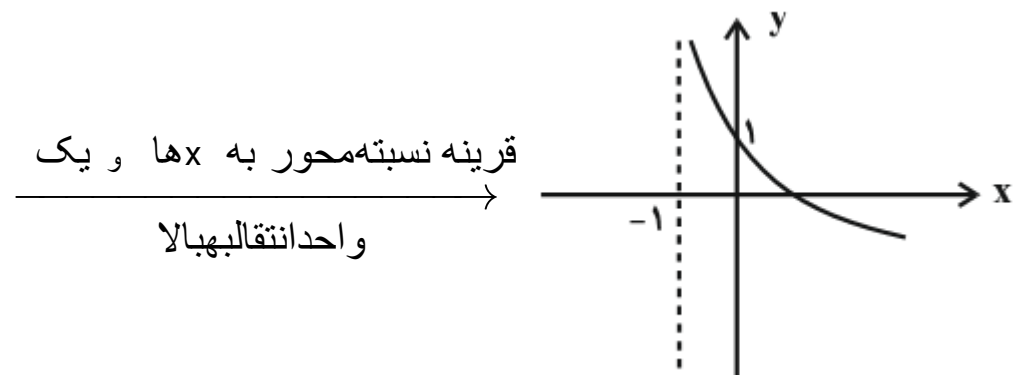
درصد پاسخگویی ۳۲%

قلمچی ۱۳۹۹

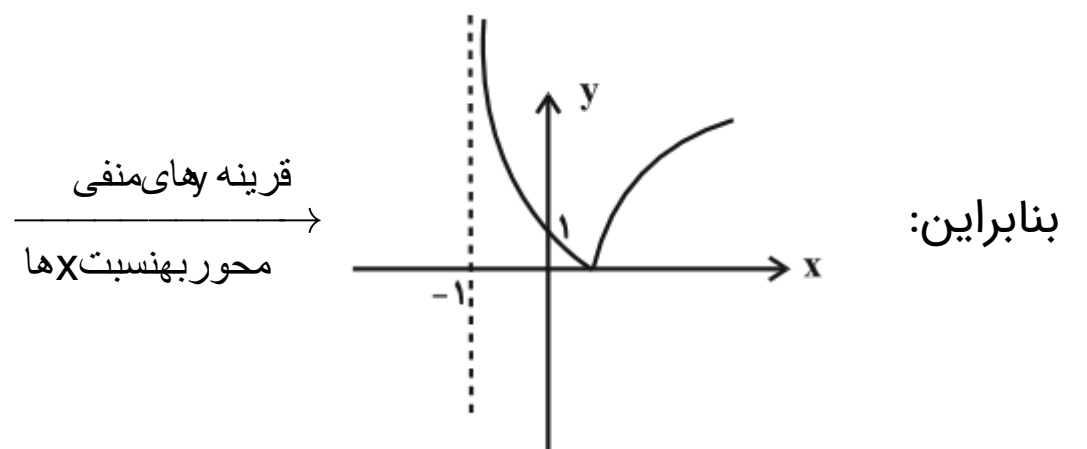


$$y_1 = \log x$$

$$y_2 = \log(x+1)$$



$$y_3 = 1 - \log(x+1)$$



بنابراین:

$$f(x) = |1 - \log(x+1)|$$

۳۵

جواب معادله $\log_5^{2x} - 2 \log \sqrt{x} = 0$ کدام است؟

(۴) $-\frac{1}{10}$

(۳) $\frac{1}{10}$

(۲) -10

(۱) 10

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۲%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

می‌دانیم:

$$\log 2 + \log 5 = \log 10 = 1 \Rightarrow \log 5 = 1 - \log 2$$

حال داریم:

$$\log_5^{2x} - 2 \log \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \log_5^{2x} - \log^{(\sqrt{x})^2} = 0$$

$$\Rightarrow \log_5^{2x} = \log^x$$

$$\Rightarrow \frac{\log^{2x}}{\log^5} = \log x \Rightarrow \log 2 + \log x = \log x(1 - \log 2)$$

$$\Rightarrow \log 2 + \log x = \log x - \log 2 \times \log x$$

$$\log 2 = -\log 2 \times \log x$$

$$\log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

۳۶

جواب معادله $2^x + 2^{x+2} = 3^x$ به صورت $x = \log_{\frac{b}{2}} a$ است. اگر a و b صحیح باشند، حاصل $a + b$ کدام است؟

(۴) ۹

(۳) ۸

(۲) ۷

(۱) ۶

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۳%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

معادله را به صورت زیر حل می‌کنیم.

$$2^x + 2^2 \times 2^x = 3^x \Rightarrow 2^x(1 + 4) = 3^x \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 5$$

$$\Rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 5 = \log_{\frac{b}{2}} a$$

اگر a و b صحیح باشند، باید $a = 5$ ، $b = 3$ و در نتیجه $a + b = 8$ باشد.

۳۷

حاصل عبارت $\log_3^{\sqrt{243}} + \log_{\sqrt{27}}^9 - \log_8^{16}$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{7}{6}$

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) $\frac{1}{3}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۳%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

$$\log_3^{\sqrt{243}} + \log_{\sqrt{27}}^9 - \log_8^{16} = \log_3^{\frac{3^5}{2}} + \log_{3^{\frac{3}{2}}}^{\frac{3^2}{3}} - \frac{4}{3} \log_2^2$$

$$= \frac{5}{2} \log_3^3 + \frac{4}{3} \log_3^3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{2} + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{5}{2}$$

در محاسبات فوق دقت شودکه:

$$\begin{cases} \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ \log_b^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a \\ \log_a^a = 1 (a > 0, a \neq 1) \end{cases}$$

۳۸

از معادله $\log_p^{(x+14)} + \log_q^{(x+14)} + \log_{16}^{(x+14)} = 7$ مقدار لگاریتم $\sqrt{x}$ در مبنای ۸ کدام است؟

(۲) ۱

(۱) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{6}$

(۳) $\frac{1}{3}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۴%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

$$\log_p^{(x+14)} + \frac{1}{2} \log_p^{(x+14)} + \frac{1}{4} \log_p^{(x+14)} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4} \log_p^{(x+14)} = 7 \Rightarrow \log_p^{(x+14)} = 4$$

$$\Rightarrow x + 14 = 16 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow \log_8^{\sqrt{x}} \underline{\underline{x = 2}} \log_8^{\sqrt{2}} = \log_{2^3}^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} \log_2^2 = \frac{1}{6}$$

۳۹

اگر a و b اعداد صحیح باشند که در معادله $\frac{2^{a+b}}{9^{2a-b}} = 144$ صدق می‌کنند، حاصل $3a - 2b$ کدام است؟

۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۳ (۴)

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۴%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$(2^{a+b})((3^{-2})^{2a-b}) = 144$$

$$\Rightarrow (2^{a+b})(3^{-4a+2b}) = 2^4 \times 3^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ -4a+2b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a-2b=-8 \\ -4a+2b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -6a = -6 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow 3a - 2b = 3 - 6 = -3$$

۴۰

اگر نمودار توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 3^{ax+b}$ در نقاطی به طول ۱ و ۳ متقاطع باشند، نمودار تابع $g(x)$ را چند واحد به پایین منتقل کنیم تا نمودار تابع $y = \log(x-1)$ را در نقطه $x_0 = 2$ قطع کند؟

۴ (۱)

۳ (۲)

۲ (۳)

۱ (۴)

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۵%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا نقاط $x=1$ و $x=3$ را در ضابطه f جای‌گذاری می‌کنیم. دو نقطه حاصل در نیز صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned} (1, 1) &\rightarrow 3^{a+b} = 1 \\ (3, 9) &\rightarrow 3^{3a+b} = 3^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 3a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = 3^{x-1}$$

حال نمودار تابع g را a واحد به پایین منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y = \log(x-1)$ را در $x=2$ قطع کند:

$$3^{x-1} - a = \log^{(x-1)} \xrightarrow{x=2} 3 - a = 0 \Rightarrow a = 3$$

(۴۱)

حاصل عبارت $A = \log_{\sqrt{32}}^{\frac{1}{4}} + \log_9^{\sqrt[3]{81}}$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{5}$

(۳) $-\frac{2}{15}$

(۲) $-\frac{1}{25}$

(۱) $-\frac{5}{4}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۵%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

$$A = \log_{\sqrt{32}}^{\frac{1}{4}} + \log_9^{\sqrt[3]{81}}$$

$$\left. \begin{aligned} \log_{\sqrt{32}}^{\frac{1}{4}} &= \log_{2^{\frac{5}{2}}}^{2^{-2}} = \frac{-2}{\frac{5}{2}} = -\frac{4}{5} \\ \log_9^{\sqrt[3]{81}} &= \log_{3^2}^{3^{\frac{4}{3}}} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3} \end{aligned} \right\} A = -\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{-2}{15}$$

(۴۲)

اگر $2^{x^2} = (\log_9^{\frac{1}{3}})$ باشد، آنگاه حاصل عبارت تعریف شده $\frac{\log(x+3)}{\log(\lambda x)}$ کدام است؟

(۴) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۱) $\frac{3}{2}$

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۶%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\log_9^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}(2^{x^2}) = -1 \Rightarrow 2^{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

عبارت $\frac{\log(x+3)}{\log(\lambda x)}$ به ازای $x = -1$ تعریف نمی‌شود. پس $x = 1$ پذیرفته است:

$$\frac{\log(x+3)}{\log(\lambda x)} = \frac{\log 4}{\log \lambda} = \log_{\lambda}^4 = \frac{2}{3}$$

۴۳

وارون تابع $f(x) = 2^{x+1} - 3$ به صورت تابع $f^{-1}(x) = \log_p\left(\frac{x+a}{b}\right)$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

متوسط

درصد پاسخگویی ۳۶%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$y = f(x) = 2^{x+1} - 3 \Rightarrow 2^{x+1} = y + 3 \Rightarrow \log_2^{(y+3)} = x + 1$$

$$\Rightarrow x = \log_2^{(y+3)} - 1 \xrightarrow[\text{را عوض می کنیم}]{\text{جای } x \text{ و } y} y = f^{-1}(x) = \log_2^{(x+3)} - 1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2^{(x+3)} - \log_2^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2^{\left(\frac{x+3}{2}\right)} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = 5$$

۴۴

اگر نمودار $f(x) = 2 - \log_p^{(x+1)}$ محور x ها را در نقطه $(a, 0)$ و محور y ها را در نقطه $(0, b)$ قطع کند، مقدار $a + b$ کدام است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

ساده

درصد پاسخگویی ۳۶%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

$$\text{محور } x \text{ ها } f(x) = 0 \Rightarrow 2 - \log_p^{(x+1)} = 0$$

$$\Rightarrow 2 = \log_p^{(x+1)} \Rightarrow x + 1 = 2^2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{محور } y \text{ ها } \Rightarrow f(0) = 2 - \log_p^{(0+1)} = 2 - 0 = 2$$

$$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow a + b = 3 + 2 = 5$$

۴۵

اگر $x = a$ جواب معادله $\log(\omega - x^2) = \log_{\omega/1}^{\frac{1}{x}} + \log 4$ باشد، حاصل $\log_{\omega/5}^{(3-a^3)}$ کدام است؟

(۲) -۱ یا -۷

(۱) ۱ یا ۷

(۴) فقط -۱

(۳) فقط ۱

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\log_{\omega/1}^{\frac{1}{x}} = \log_{\omega}^{x^{-1}} = \frac{-1}{-1} \log_{\omega}^x = \log x$$

$$\log(\omega - x^2) = \log x + \log 4 = \log 4x \Rightarrow \omega - x^2 = 4x$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - \omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow a = 1 \\ x = -\omega \text{ غ} \end{cases}$$

(به ازای $x = -\omega$ عبارت‌های لگاریتمی معادله اولیه تعریف نمی‌شوند.)

$$\log_{\omega/5}^{(3-a^3)} = \log_{\omega/5}^{(3-1^3)} = \log_{\omega/5}^2 = \log_{\omega/5}^2 = -1$$

۴۶

جواب معادله $\log_{\sqrt{3}}^{x^2} + \log_x^3 = 4$ کدام است؟

(۴) ۳

(۳) ۲

(۲) $\sqrt{3}$ (۱) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\log_{\sqrt{3}}^{x^2} + \log_x^3 = 4 \Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_{\sqrt{3}}^x + \log_x^3 = 4$$

$$\Rightarrow 4 \log_{\sqrt{3}}^x + \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}^x} = 4 \xrightarrow{\log_{\sqrt{3}}^x = t} 4t + \frac{1}{t} = 4$$

$$\xrightarrow{\times t} 4t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow (2t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{3}}^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

ساده

درصد پاسخگویی ۳۷%

قلمچی ۱۴۰۰

ساده

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۳۹۹

۴۷

اگر $6^x = 3^{x-2}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت $(\sqrt{2})^x$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{9}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۸%

ساده

گزینه «۲»

با ساده کردن تساوی داده شده داریم:

$$3^{x-2} = (3 \times 2)^x \Rightarrow 3^x \times 3^{-2} = 3^x \times 2^x \xrightarrow{3^x \neq 0} \frac{1}{9} = 2^x \Rightarrow x = \log_2 \frac{1}{9}$$

حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$(\sqrt{2})^x = (\sqrt{2})^{\log_2 \frac{1}{9}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_2 \sqrt{2}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

۴۸

اگر $\log_3^F = a$ باشد، حاصل $\log_{3^2}^{F^8}$ کدام است؟

(۱) $\frac{Fa+1}{5a}$

(۲) $\frac{F+a}{5}$

(۳) $\frac{a+1}{10}$

(۴) $\frac{Fa+2}{5a}$

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۳۸%

ساده

گزینه «۴»

$$\log_3^F = a \Rightarrow \log_{3^2}^{F^2} = a \Rightarrow 2 \log_3^F = a \Rightarrow \log_3^F = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \log_3^F = \frac{2}{a}$$

$$\begin{aligned} \log_{3^2}^{F^8} &= \log_{3^2}^{(2^F \times 3^2)} = \log_{3^2}^{2^F} + \log_{3^2}^{3^2} = \frac{F}{5} + \frac{1}{5} \log_3^3 \\ &= \frac{F}{5} + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{a}\right) = \frac{F}{5} + \frac{2}{5a} = \frac{Fa+2}{5a} \end{aligned}$$

۴۹

نمودار تابع $f(x) = \log_a^{(bx-5)}$ محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع می‌کند. اگر نمودار تابع از نقطه $(\frac{fb+5}{2}, 3)$ نیز بگذرد، حاصل ab کدام است؟

(۴) ۶-

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۴-

پاسخ: گزینه ۲

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۳۹۹

ساده

گزینه «۲»

$$f(3) = \log_a^{3b-5} = 0 \Rightarrow 3b - 5 = 1 \Rightarrow b = 2$$

پس $f(x) = \log_a^{2x-5}$. از آنجایی که تابع از نقطه $(\frac{fb+5}{2}, 3)$ نیز می‌گذرد، داریم:

$$f(\frac{fb+5}{2}) = 3 \xrightarrow{b=2} f(\frac{13}{2}) = 3 \Rightarrow \log_a^{13-5} = 3$$

$$\Rightarrow \log_a^8 = 3 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow ab = 2 \times 2 = 4$$

۵۰

اگر $\log_3^2 = a$, $\log_3^5 = b$, $\log_{\frac{36}{5}} = c$ ، آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

(۴) $2a + b = c - 2$

(۳) $2a - b = c + 1$

(۲) $b - c = 2a + 1$

(۱) $b + c = 2a + 2$

پاسخ: گزینه ۱

درصد پاسخگویی ۳۸%

قلمچی ۱۴۰۰

ساده

گزینه «۱»

$$\begin{aligned} \log_{\frac{36}{5}}^{\frac{36}{5}} &= \log_3^{36} - \log_3^5 = \log_3^4 + \log_3^9 - \log_3^5 \\ &= 2 \log_3^2 + 2 - \log_3^5 \\ &\Rightarrow c = 2a + 2 - b \Rightarrow b + c = 2a + 2 \end{aligned}$$

۵۱

ریشه معادله $\log_3(2x + 2) - \log_3(1 - x^2) = 1$ در کدام بازه زیر قرار دارد؟

- (۱) $(-\frac{1}{3}, 0)$ (۲) $(0, \frac{1}{3})$ (۳) $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ (۴) $(\frac{1}{4}, 1)$

پاسخ: گزینه ۲

ساده درصد پاسخگویی ۴۰% قلمچی ۱۴۰۰

گزینه «۲»

$$\log_3(2x + 2) - \log_3(1 - x^2) = 1$$

$$\Rightarrow \log_3\left(\frac{2x+2}{1-x^2}\right) = 1 \Rightarrow \frac{2x+2}{1-x^2} = 3$$

$$\Rightarrow 2x + 2 = 3 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ق ق} \\ x = \frac{1}{3} \text{ ق ق} \end{cases}$$

با توجه به دامنه عبارت های لگاریتمی، فقط $x = \frac{1}{3}$ ریشه این معادله می باشد که با توجه به گزینه ها، در بازه $(0, \frac{1}{3})$ قرار دارد.

۵۲

کدام نقطه روی نمودار تابع وارون تابع $f(x) = 1 - \log_3 x$ قرار ندارد؟

- (۱) $(0, 2)$ (۲) $(1, 1)$ (۳) $(-1, 3)$ (۴) $(-2, 8)$

پاسخ: گزینه ۳

ساده درصد پاسخگویی ۴۰% قلمچی ۱۴۰۰

گزینه «۳»

می دانیم اگر $(a, b) \in f$ ، آنگاه $(b, a) \in f^{-1}$ ، پس داریم:

$$f(2) = 1 - \log_3 2 = 0 \Rightarrow (0, 2) \in f^{-1}$$

$$f(1) = 1 - \log_3 1 = 1 \Rightarrow (1, 1) \in f^{-1}$$

$$f(3) = 1 - \log_3 3 = 0 \neq -1$$

$$f(8) = 1 - \log_3 8 = -2 \Rightarrow (-2, 8) \in f^{-1}$$

حاصل ضرب ریشه‌های معادله $۲(\log_۴ x)^۲ + ۵ \log_۴ x - ۳ = ۰$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{۳۲}$

(۲) $\frac{1}{۸}$

(۳) $\frac{1}{۱۶}$

(۴) $\frac{1}{۶۴}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$\log_۴ x = t$$

$$۲t^۲ + ۵t - ۳ = ۰ \Rightarrow t = +\frac{1}{۲}, t = -۳$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_۴ x = \frac{1}{۲} \Rightarrow x_1 = ۴^{\frac{1}{۲}} = ۲ \\ \log_۴ x = -۳ \Rightarrow x_۲ = ۴^{-۳} = \frac{1}{۴^۳} = \frac{1}{۶۴} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 \times x_۲ = ۲ \times \frac{1}{۶۴} = \frac{1}{۳۲}$$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۰%

قلم‌چی ۱۳۹۹

۵۴

اگر $A = \log_2 \frac{5}{7}$ ، $B = \log_3 \frac{3}{4}$ و $C = \log_{\frac{5}{4}} \frac{5}{4}$ باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

- (۱) A منفی و B و C مثبت‌اند.
 (۲) A مثبت و B و C منفی‌اند.
 (۳) A و B منفی و C مثبت است.
 (۴) A و C منفی و B مثبت است.

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۴۱%

ساده

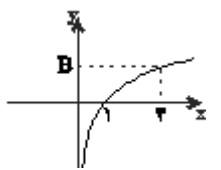
گزینه «۱»

از رسم نمودار استفاده می‌کنیم و هر کدام از مقادیر را با توجه به نمودار تابع آن تعیین علامت می‌کنیم.

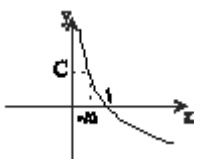
برای $A = \log_2 \frac{5}{7}$ در تابع $y = \log_2 x$ به ازای $x = \frac{5}{7}$ می‌بینیم که $\log_2 \frac{5}{7} < 0$ ، پس $A < 0$ است.



برای $B = \log_3 \frac{3}{4}$ در تابع $y = \log_3 x$ به ازای $x = \frac{3}{4}$ می‌بینیم که $\log_3 \frac{3}{4} > 0$ ، پس $B > 0$ است.



برای $C = \log_{\frac{5}{4}} \frac{5}{4}$ در تابع $y = \log_{\frac{5}{4}} x$ به ازای $x = \frac{5}{4}$ می‌بینیم که $\log_{\frac{5}{4}} \frac{5}{4} > 0$ ، پس $C > 0$ است.



۵۵

اگر $x = 2^{1-2\log_{5/4} x}$ باشد، حاصل $\log_{16} x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۲%

ساده

گزینه «۱»

$$2^{1-2\log_{5/4} x} = x \Rightarrow 1 - 2\log_{5/4} x = \log_2 x$$

$$\Rightarrow 1 - 2\log_{2^{-1}} x = \log_2 x$$

$$\Rightarrow 1 + 2\log_2 x = \log_2 x \Rightarrow \log_2 x = -1 \Rightarrow x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \log_{16} x = \log_{16} \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

۵۶

از معادله $\log_{5-x}^{(x-1)} + \log_{5-x}^{(x+2)} = \log_{5-x}^4$ مقدار لگاریتم $x + 2$ در مبنا ۸ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) ۱

ساده

درصد پاسخگویی ۴۲%

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

با توجه به معادله داده شده، داریم:

$$\begin{aligned}\log_{5-x}^{(x-1)} + \log_{5-x}^{(x+2)} &= \log_{5-x}^4 \\ \Rightarrow \log_{5-x}^{(x-1)(x+2)} &= \log_{5-x}^4 \\ \Rightarrow (x-1)(x+2) &= 4 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 4 \\ \Rightarrow x^2 + x - 6 &= 0 \\ \Rightarrow (x-2)(x+3) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{قق} \\ x = -3 & \text{غقق} \end{cases}\end{aligned}$$

$$x = 2 \Rightarrow \log_{5-x}^{(x+2)} = \log_{5-x}^4 = \log_{\frac{3}{2}}^4 = \frac{2}{3} \log_{\frac{3}{2}}^2 = \frac{2}{3}$$

۵۷

اگر $\log x = \log 2 - \log(x-1)$ باشد، مقدار x کدام است؟

(۲) $2 + \sqrt{3}$

(۱) $1 + \sqrt{3}$

(۴) $4 - \sqrt{3}$

(۳) $4 + \sqrt{3}$

ساده

درصد پاسخگویی ۴۲%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned}\log(x-1)^2 - \log 2 &= \log x \\ \Rightarrow \log \frac{(x-1)^2}{2} &= \log x \\ \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2} &= x \Rightarrow (x-1)^2 = 2x \\ \Rightarrow x^2 - 2x + 1 &= 2x \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0\end{aligned}$$

$$\Delta = 16 - 4 = 12 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2 + \sqrt{3} & \text{قق} \\ x_2 = \frac{4-\sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3} & \text{غقق} \end{cases}$$

۵۸

اگر $\log_{\sqrt{3}}^3 = \frac{x}{3}$ باشد، آنگاه حاصل $\log_{\sqrt{3}}^{(6x-1)}$ کدام است؟

۳ (۱)

۱ (۲)

۴ (۳)

۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۴۳% ساده

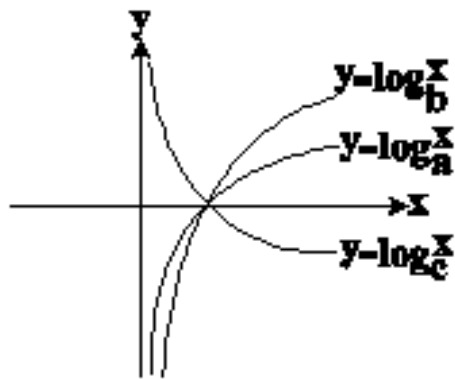
$$\log_{\sqrt{3}}^{3 \times 3^{\frac{1}{2}}} = \log_{\sqrt{3}}^{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \log_{\sqrt{3}}^3 = \frac{1}{2} = \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\log_{\sqrt{3}}^{(6(\frac{3}{2})-1)} = \log_{\sqrt{3}}^8 = \log_{\sqrt{3}}^{2^3} = \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_{\sqrt{3}}^2 = 2$$

۵۹

نمودار مربوط به سه تابع لگاریتمی در شکل زیر رسم شده است. کدام گزینه صحیح است؟



۱) $c < b < a$

۲) $c < a < b$

۳) $a < b < c$

۴) $b < a < c$

پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۴۳% ساده

گزینه «۱»

با توجه به نزولی بودن نمودار $y = \log_c^x$ نتیجه می‌گیریم $0 < c < 1$ است و بین توابع $y = \log_b^x$ و $y = \log_a^x$ هم رابطه $a > b$ برقرار است. پس گزینه اول پاسخ صحیح است.

۶۰

اگر $\frac{2^{x+y}}{2^{3x}} = 16$ و $\log(x+y) - \log x = 1$ باشد، حاصل $x - y$ کدام است؟

(۴) -۸

(۳) ۸

(۲) -۹

(۱) ۹

ساده

درصد پاسخگویی ۴۵%

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ابتدا معادله اول را ساده می‌کنیم:

$$\frac{2^{x+y}}{(2^3)^x} = 2^4 \Rightarrow \frac{2^{x+y}}{2^{6x}} = 2^4 \Rightarrow 2^{y-5x} = 2^4 \Rightarrow y - 5x = 4$$

معادله دوم نیز به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\log(x+y) - \log x = 1 \Rightarrow \log\left(\frac{x+y}{x}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x+y}{x} = 10$$

$$x + y = 10x \Rightarrow y = 9x$$

پس یک دستگاه دو معادله - دو مجهول داریم:

$$\begin{cases} y - 5x = 4 \\ y = 9x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow x - y = -8$$

۶۱

اگر a و b جواب‌های معادله $x^2 - 8x + 4 = 0$ باشد، حاصل $\log_{ab}^{a+b} + \log_r^a + \log_r^b$ کدام است؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $\frac{7}{2}$

(۲) $\frac{9}{2}$

(۱) ۲

ساده

درصد پاسخگویی ۴۵%

قلمچی ۱۴۰۰

پاسخ: گزینه ۳

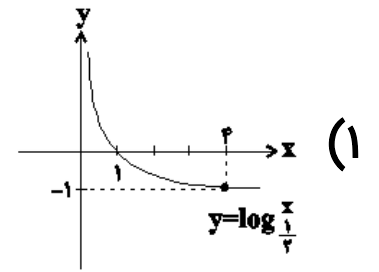
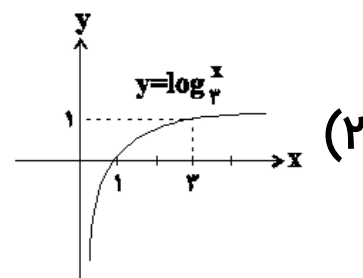
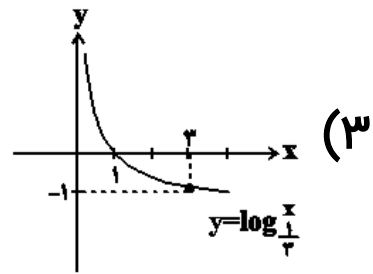
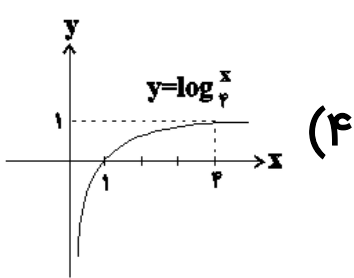
گزینه «۳»

$$x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{-b}{a} = 8 \\ P = \frac{c}{a} = 4 \end{cases}$$

$$\log_{ab}^{a+b} + \log_r^a + \log_r^b = \log_{ab}^{a+b} + \log_r^{ab}$$

$$= \log_8^8 + \log_8^4 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

نمودار کدام تابع درست رسم نشده است؟



پاسخ: گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۵%

ساده

با توجه به نقاط زیر گزینه «۱» درست رسم نشده است:

$$\xrightarrow{x=1} y = \log_{\frac{1}{4}} 1 = 0$$

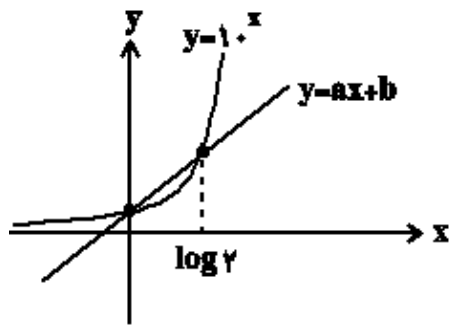
$$\xrightarrow{x=4} y = \log_{\frac{1}{4}} 4 = -2$$

بنابراین نمودار باید از نقطه $(4, -2)$ عبور کند.

تذکر: نمودار رسم شده در گزینه «۱»، نمودار تابع $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ است.

۶۳

با توجه به شکل مقابل، مقدار a کدام است؟



(۱) $-\log 2$

(۲) $\log 2$

(۳) $(\log 2)^{-1}$

(۴) $(\log 2) - 1$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ساده

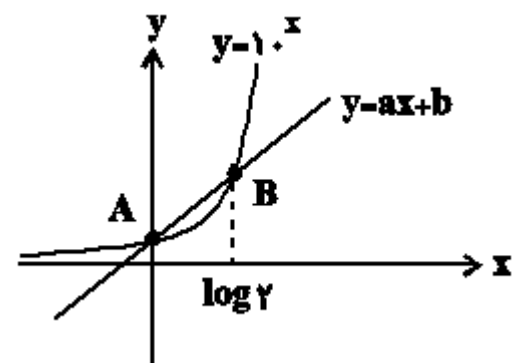
درصد پاسخگویی ۴۶%

قلمچی ۱۴۰۰

$$\begin{aligned} x=0 &\rightarrow y_A = 10^0 = 1 \\ x=\log 2 &\rightarrow y_B = 10^x \Rightarrow y_B = 10^{\log 2} = 2 \\ \log_{10} 2 &= 2^1 = 2 \end{aligned}$$

مقدار a برابر است با شیب خط، بنابراین:

$$\begin{aligned} \Rightarrow m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 1}{\log 2} = \frac{1}{\log 2} \\ &= (\log 2)^{-1} \end{aligned}$$



۶۴

اگر $a = \log_{75} 5$ باشد، حاصل $\log_{75} 3$ کدام است؟

(۴) $1 - 2a$

(۳) $-2a$

(۲) $2a - 1$

(۱) $2a$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ساده

درصد پاسخگویی ۴۶%

قلمچی ۱۳۹۹

$$\begin{aligned} \log_{75} 3 &= \log_{75} \frac{75}{25} = \log_{75} 75 - \log_{75} 25 = 1 - \log_{75} 5^2 \\ &= 1 - 2\log_{75} 5 = 1 - 2a \end{aligned}$$

۶۵

اگر $f(x) = \log_f(x^2 + 4)$ باشد، حاصل $f(2\sqrt{3})$ کدام است؟

۱ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

ساده

درصد پاسخگویی ۴۹%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

$$f(2\sqrt{3}) = \log_f((2\sqrt{3})^2 + 4) = \log_f(12 + 4) = \log_f 16 \\ \Rightarrow \log_f f^2 = 2 \log_f f = 2$$

۶۶

دامنه تابع $y = \log_{\sqrt{x-1}}(4-x^2)$ کدام است؟

(۱, ۲) (۲)

(-۲, ۲) (۱)

(-۱, ۱) (۴)

(۱, ۲) $\cup$ (۲, ۲√۲) (۳)

ساده

درصد پاسخگویی ۵۰%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

نکته: در تابع $y = \log_a^u$ داریم: $u > 0$ و همچنین $a > 0, a \neq 1$.

$$4 - x^2 > 0 \Rightarrow -2 < x < 2 \quad (I)$$

$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \quad (II)$$

$$x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \quad (III)$$

$$(I) \cap (II) \cap (III) \rightarrow \text{دامنه: } (1, 2)$$

۶۷

اگر $x = ۸ \log_{۴} \sqrt[۲]{۲}$ باشد، آنگاه لگاریتم عدد $۴(x + ۳)$ در پایه x کدام است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

$\frac{۳}{۲}$ (۲)

$\frac{۴}{۳}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ساده

درصد پاسخگویی ۵۲%

قلمچی ۱۴۰۰

گزینه «۳»

$$x = ۸ \log_{۴} \sqrt[۲]{۲} = ۸ \log_{۲^۲} ۲^{\frac{۳}{۲}} = ۸ \times \frac{۳}{۲} \log_{۲} ۲ \Rightarrow x = ۶$$

به ازای $x = ۶$ حاصل عبارت را می‌یابیم:

$$\log_x {}^{۴(x+۳)} = \underline{\underline{x=۶}} \quad \log_۶ {}^{۳۶} = \log_۶ {}^{۶^۲} = ۲$$

۶۸

حاصل عبارت $A = ۲ \log_{۱۰} \sqrt[۵]{۱۰۰۰} - \log_{\sqrt[۵]{۴۹}}$ کدام است؟

$\frac{۷}{۵}$ (۲)

$\frac{۲}{۵}$ (۴)

$\frac{۱۳}{۵}$ (۱)

$\frac{۳}{۵}$ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

ساده

درصد پاسخگویی ۵۴%

قلمچی ۱۳۹۹

$$۲ \log_{۱۰} \sqrt[۵]{۱۰۰۰} = \log_{۱۰} (\sqrt[۵]{۱۰۰۰})^۲ = \log_{۱۰} {}^{۱۰۰۰} = ۳$$

$$\log_{\sqrt[۵]{۴۹}} = \log_{\sqrt[۵]{۷^۲}} = \frac{۲}{۵} \log_۷ ۷ = \frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow A = ۳ - \frac{۲}{۵} = \frac{۱۵ - ۲}{۵} = \frac{۱۳}{۵}$$

۶۹

حاصل $\log_5(\sqrt{125})^3$ کدام است؟

۵/۵ (۴)

۴/۵ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۵۵% ساده

گزینه «۳»

با توجه به قانون $\log_a^b = b$ داریم:

$$\begin{aligned}\log_5(\sqrt{125})^3 &= \log_5(5^{\frac{3}{2}})^3 = \log_5(5)^{\frac{9}{2}} \\ &= \frac{9}{2} \log_5^5 = \frac{9}{2} = 4/5\end{aligned}$$

۷۰

کدام گزینه نادرست است؟

$2^{-\sqrt{3}} > 2^{-\sqrt{2}}$ (۴)

$2^{2\sqrt{7}} > 4^{\sqrt{5}}$ (۳)

$2^{\sqrt{3}} < (\frac{1}{2})^{-3}$ (۲)

$(\frac{1}{2})^5 < (\frac{1}{2})^4$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۵۶% ساده

گزینه «۴»

اگر $a > 1$ باشد و $x < y$ ، آنگاه: $a^x < a^y$

اگر $0 < a < 1$ باشد و $x < y$ ، آنگاه: $a^x > a^y$

در گزینه «۱»: $(\frac{1}{2})^5 < (\frac{1}{2})^4$

در گزینه «۲»: $2^{\sqrt{3}} < (\frac{1}{2})^{-3} = 2^3 = 8$

در گزینه «۳»: $2^{2\sqrt{7}} = 4^{\sqrt{7}} > 4^{\sqrt{5}}$

در گزینه «۴»: $2^{-\sqrt{3}} = (\frac{1}{2})^{\sqrt{3}}$ ، $2^{-\sqrt{2}} = (\frac{1}{2})^{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow 2^{-\sqrt{3}} < 2^{-\sqrt{2}}$$

بنابراین گزینه «۴» نادرست است.

۷۱

اگر نمودار $f(x) = ۲ \log_a^x$ از نقطه $(۹, ۲)$ عبور کند، مقدار a کدام است؟

۳ (۲)

$\frac{۱}{۳}$ (۴)

۲ (۱)

۹ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۵۶%

ساده

چون نمودار تابع از نقطه $(۹, ۲)$ می‌گذرد، پس:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(۹, ۲)} f(۹) = ۲ &\Rightarrow ۲ \log_a^9 = ۲ \\ \Rightarrow \log_a^9 = ۱ &\Rightarrow a = ۹ \end{aligned}$$

۷۲

اگر $\log_b^a = \frac{۱}{۲}$ ، آنگاه $\log_{\sqrt{b}}^{ab}$ کدام است؟

۲ (۳)

-۱ (۲)

۴ (۱)

۳ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

قلمچی ۱۴۰۰

درصد پاسخگویی ۵۸%

ساده

گزینه «۴»

با ساده کردن لگاریتم داده شده داریم:

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{a}}^{ab} &= \log_{\sqrt{b}}^a + \log_{\sqrt{b}}^b = ۲ \log_b^a + ۲ \log_b^b \\ &= ۲ \times \left(\frac{۱}{۲}\right) + ۲ = ۳ \end{aligned}$$

۷۳

برد تابع $y = \log_x^x$ کدام است؟

R (۴)

[۱ , +∞) (۳)

(۰ , +∞) (۲)

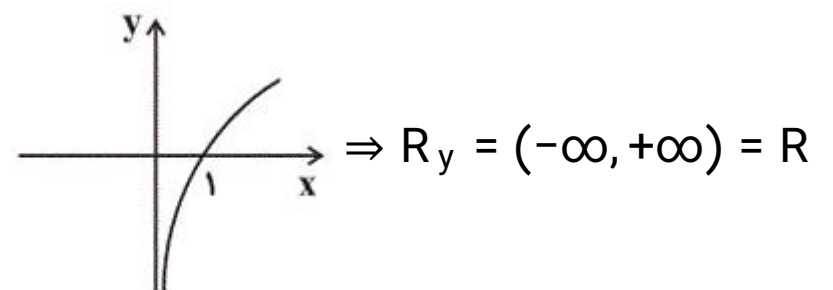
[۰ , +∞) (۱)

ساده

درصد پاسخگویی ۵۹%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۴

نمودار تابع $y = \log_x^x$ را رسم می‌کنیم:

$$y = \log_x^x$$

۷۴

در نمودار تابع $y = \log_a^x$ به ازای $۰ < a < ۱$ با افزایش مقدار x ، مقدار y ... می‌یابد. و به ازای $a > ۱$ با افزایش مقدار x ، مقدار y ... می‌یابد.

(۲) افزایش- کاهش
(۴) کاهش- کاهش

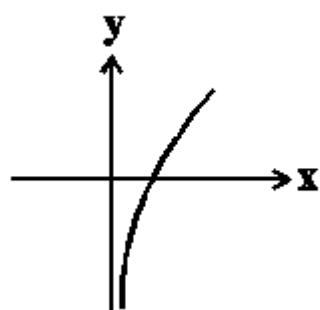
(۱) افزایش- افزایش
(۳) کاهش- افزایش

ساده

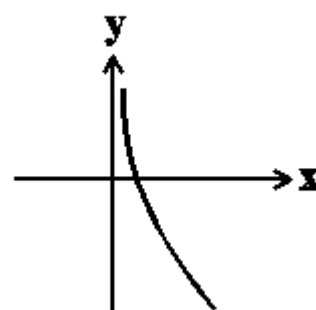
درصد پاسخگویی ۶۰%

قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: گزینه ۳

نمودار تابع $y = \log_a^x$ به صورت‌های زیر رسم می‌شود:

$$a > 1$$



$$۰ < a < 1$$